****

La **teoría de la relatividad general** es una teoría métrica de la [gravitación](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_gravitatorio) que incorpora además una descripción básica de los [sistemas de referencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_referencia) totalmente generales.

Matemáticamente la teoría de la relatividad describe los efectos del campo gravitatorio modelando el universo como una [variedad Pseudoriemanniana](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_pseudoriemanniana), que recibe el nombre de [espacio-tiempo](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio-tiempo).

El campo gravitatorio se manifiesta en la [curvatura del espacio-tiempo](http://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura_del_espacio-tiempo) de tal manera que cuanto más intenso es el campo gravitatorio en cierto punto mayores son las componentes del [tensor de curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_curvatura) en ese punto.

Este artículo introduce los conceptos matemáticos básicos que intervienen en la [teoría de la relatividad general](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_relatividad_general), básicamente esos conceptos se refieren a la [geometría diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial), el [cálculo sobre variedades](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_diferenciable) y el [álgebra tensorial](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_tensorial).

**La derivada covariante**

El hecho de que el espacio tiempo sea curvo hace que en cada punto del espacio, los espacios vectoriales tangentes no coincidan, y por tanto, al derivar una magnitud tensorial es necesario tener en cuenta tanto la variación de las componentes como de la base vectorial al cambiar de un punto a otro del espacio.

Para expresar la derivada covariante respecto a una dirección asociada con la coordenada x^\alpha\,se usa la notación \nabla_\alphaen lugar de \part_\alpha. Así la derivada de una magnitud vectorial vendrá dada por la variación de las componentes y la base vectorial:

\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\,son los llamados [símbolos de Christoffel](http://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADmbolos_de_Christoffel) que expresan la derivada de un vector como [combinación lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Combinaci%C3%B3n_lineal) de los vectores de la base. La expresión anterior puede expresarse, teniendo en cuenta que los índices repetidos son índices mudos, equivalentemente como:

**El tensor métrico**

El tensor métrico es el objeto matemático que permite calcular "distancias" y otros conceptos métricos en relatividad general. Además a partir de sus derivadas puede construirse el concepto de [curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura).

Técnicamente es un tensor simétrico de segundo orden, a partir del cual puede calcularse longitud de una curva a partir de una integral a lo largo de tramos de dicha curva y definida entre dos puntos de la misma.

Una vez especificado un sistema de coordenadas, el tensor métrico se representa mediante un conjunto de funciones g_{ij}, llamadas componentes o coeficientes del tensor métrico:

 g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \ dx^i\otimes dx^j

En física la expresión del tensor métrico se escribe de una forma en que se aprecia como las componentes anteriores se relacionan localmente con la [longitud](http://es.wikipedia.org/wiki/Longitud_de_arco), mediante la expresión informal, usando el [convenio de sumación de Einstein](http://es.wikipedia.org/wiki/Convenio_de_sumaci%C3%B3n_de_Einstein) .

Además, dado el significado físico y uso del tensor se omiten los productos tensoriales y la expresión equivalente que usualmente se escribe es:

ds^2 =  g_{ij} \ dx^i dx^j \qquad \Rightarrow \qquad 
\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{ij} \ \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}


El ejemplo más sencillo posible de tensor métrico, es el del espacio Euclideo tridimensional, expresado en coordenadas cartesianas, cuyas componentes g_{ij}representadas matricialmente son precisamente las de la [matriz identidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_identidad):

g_{ij} = \begin{pmatrix} 
  1 & 0 & 0 \\
  0 & 1 & 0 \\
  0 & 0 & 1 \end{pmatrix},

Son numerosos los textos que abordan la deducción completa de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general con gran elegancia y minuciosidad.

Pero por esa misma razón es difícil encontrar un compendio en el que aparezcan condensados tanto el procedimiento formal de su desarrollo como el significado físico que encierran.

Se tratara entonces de exponer una deducción semi rigurosa de las ecuaciones gravitatorias de Einstein insistiendo en la oportuna interpretación física de su aparato matemático

Subrayando la originalidad de la geometría espacio temporal y destacando sus particulares consecuencias.

Los siguientes razonamientos son absolutamente asequibles si se tienen conocimientos básicos de la matemática avanzada y de la física clásica.

Es importante a la vez tener un conocimiento básico del algebra tensorial y de la relatividad especial.

Por ejemplo a diferencia de la física relativista especial, en el ámbito de la relatividad general no podemos hablar de velocidades relativas entre dos partículas, excepto si ambas se hallan en el mismo punto del espacio –tiempo ( en el mismo lugar y en el mismo instante)

Como tantas sutilezas, en la gravitación de Einstein, el motivo reside en la curvatura del espacio-tiempo y su inmediata influencia en el trasporte paralelo de cualquier magnitud.

Si concebimos un vector como una pequeña flechita contenida toda ella en un punto concreto del espacio tiempo, para comparar dos vectores inicialmente situados en distintos puntos del espacio – temporales, hemos de tomar uno de ellos y trasportarlo sin alteraciones hacia el otro.

El traslado de un vector a lo largo de un camino sin que experimente rotaciones, ni dilataciones ni contracciones, se denomina trasporte paralelo.

Esto no plantea dificultades en un espacio tiempo sin curvatura , como el de Minkowski en la relatividad especial.

No obstante cuando la gravedad se hace presente, el espacio tiempo , como veremos, deja de ser tan sencillo , y el trasporte paralelo se hace dependiente de la trayectoria escogida

No resulta necesario, y a veces resulta ser hasta un estorbo, imaginar la curvatura espacio temporal como si se debiese a la inmersión de nuestra variedad 4- dimensional en un espacio tiempo plano de dimensión superior.

La tentación es comprensible, pues nuestros hábitos mentales se forjan en la percepción visual de la curvatura de diversas superficies aproximadamente bidimensionales sumergidas en nuestro espacio tridimensional ordinario.

Sin embargo para manejar esta manera nueva de entender la curvatura, basta la noción de vector tangente y en general de toda la maquinaria del cálculo tensorial, destinado a manipular las magnitudes intrínsecamente.( esto es sin referencias a espacios o dimensiones externas , solo en el espacio tiempo tetradimensional que nos ocupa)

Esta es la gran importancia delos tensores en la relatividad general.

Si preferimos dejar en segundo plano el contenido geométrico espacio-temporal, la teoría gravitatoria de Einstein puede interpretarse en términos de las aceleraciones relativas sufridas por partículas de prueba en caída libre

En [física](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica), se denomina **caída libre** al movimiento de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un [campo gravitatorio](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_gravitatorio). Esta definición formal excluye a todas las caídas *reales* influenciadas en mayor o menor medida por la [resistencia aerodinámica](http://es.wikipedia.org/wiki/Resistencia_aerodin%C3%A1mica) del [aire](http://es.wikipedia.org/wiki/Aire), así como a cualquier otra que tenga lugar en el seno de un [fluido](http://es.wikipedia.org/wiki/Fluido); sin embargo es frecuente también referirse coloquialmente a éstas como caídas libres, aunque los efectos de la [viscosidad](http://es.wikipedia.org/wiki/Viscosidad) del medio no sean por lo general despreciables.

**La caída libre como sistema de referencia**

Un [sistema de referencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_referencia) ligado a un cuerpo en caída libre puede considerarse **inercial** o **no inercial** en función del marco teórico que se esté usando.

En la [física clásica](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_cl%C3%A1sica), la [fuerza gravitatoria](http://es.wikipedia.org/wiki/Fuerza_gravitatoria) que se ejerce sobre una [masa](http://es.wikipedia.org/wiki/Masa) es proporcional a la intensidad del [campo gravitatorio](http://es.wikipedia.org/wiki/Campo_gravitatorio) en la posición espacial donde se encuentre dicha masa.

La constante de proporcionalidad es precisamente el valor de la [masa inercial](http://es.wikipedia.org/wiki/Masa_inercial) del cuerpo, tal y como establece el [principio de equivalencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_equivalencia).

En la [física relativista](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_relativista), la gravedad es el efecto que produce sobre las trayectorias de los cuerpos la curvatura del [espacio-tiempo](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio-tiempo); en este caso, la gravedad no es una fuerza, sino una [geodésica](http://es.wikipedia.org/wiki/Geod%C3%A9sica).

Por tanto, desde el punto de vista de la [física clásica](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_cl%C3%A1sica), un sistema de referencia en caída libre es un sistema acelerado por la fuerza de la gravedad y, como tal, es no inercial.

Por el contrario, desde el punto de vista de la [física relativista](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_relativista), el mismo sistema de referencia es inercial, pues aunque está acelerado en el espacio, no está acelerado en el [espacio-tiempo](http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio-tiempo).

La diferencia radica en la propia definición de los conceptos geométricos y cinemáticos, que para cada marco teórico son completamente diferentes.

Una partícula de prueba es una porción de materia que sin ser necesariamente puntual, tiene poca energía y poca cantidad de movimiento que la gravedad ejercida por ellas misma es despreciable.

Un cuerpo se considera en caída libre cuando su movimiento tan solo se ve afectado por la gravedad.

Los objetos en caída libre describen geodésicas espacio – temporales, lo que es modo equivalente a decir que sus vectores velocidad se transportan paralelamente a si miso (sin rotaciones ni estiramiento) a lo largo de la trayectoria.

As i pues el concepto de geodésica constituya la trasposición natural a una variedad curva de nuestra idea de línea recta.

Un primer paso hacia la senda de la gravitación Einsteniana, se da generalizando la fórmula de distancia típica de la geometría Euclidea, que viene a ser una sofisticación del conocido teorema de Pitágoras.

Comencemos preguntándonos como se debería de escribir la métrica de un sistema de coordenadas en el que usásemos como ejes líneas curvas en lugar de rectas.

Esas curvas pueden estar tan onduladas y retorcidas como queramos de modo que sobre ellas las escalas de medidas se hallan completamente distorsionadas.

Entonces necesitaremos emplear ciertos coeficientes de distorsión que sran funciones dependientes del punto que nos encontremos.

Además con el fin de evitar el efecto de las distorsiones de los ejes curvados , definimos la métrica para vectores y coordenadas de tamaño infinitesimal y escribimos.

Donde hemos usado el convenio de sumación de Einstein, según el cual la presencia de índices repetidos (en los coeficientes del tensor métrico y en las coordenadas) significa que se suma sobre todos los valores que admitan tales signos.

Esta es la fórmula fundamental de la métrica, en la que hemos usado el convenio de Einstein según el cual la presencia de índices repetidos (en los coeficientes de la métrica y en las coordenadas) significa que se suman sobre todos los valores que admiten los índices.

Cuando calculamos una distancia sobre el plano, los índices van del 1 al 2 , pero si aumentamos el número de dimensiones su abanico de posibles valores también aumentara. En tres dimensiones puede tomar los valores 1, 2 y 3, en el espacio 4-dimensional tomara valores del 1 al 4.

En el caso Euclideo, como en la geometría vectorial en el plano, los coeficientes diagonales de la métrica son todos iguales a uno, mientras que lo no diagonales son cero.

No ocurre lo mismo con la métrica geométrica en la geometría de Minkowski, pues los coeficientes no diagonales se anulan también, pero los diagonales no son todos iguales a la unidad.

El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad Lorentziana de [curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_curvatura) nula e isomorfa a \mathcal{M}_0 = (\R^4, \boldsymbol \eta)donde el [tensor métrico](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_m%C3%A9trico) puede llegar a escribirse en un sistema de [coordenadas cartesianas](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_cartesianas) como:

\eta = -dx^0\otimes dx^0 + dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2 + dx^3\otimes dx^3

O en forma [matricial](http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_(matem%C3%A1tica)) explícita, respecto a la misma base:

\left( \eta_{\alpha\beta} \right) \overset{\underset{\mathrm{def}}{}}{=}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\
                 0 & 1 & 0 & 0 \\
                 0 & 0 & 1 & 0 \\
                 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}

De todas maneras es común renombrar a las coordenadas en términos de las coordenadas espaciales y el tiempo usados en la mecánica newtoniana es decir: (x^0,x^1,x^2,x^3) \mapsto (ct,x,y,z)con lo cual el tensor métrico se escribe simplemente como:

Se denominan métricas Riemannianas a aquellas cuyos coeficientes se aproximan tanto o más a los de una métrica Euclidea cuanto más pequeño se hace el sistema de coordenadas.

Si la diferencia entre nuestra métrica y la Euclidea puede hacerse tan pequeña como se quiera, reduciendo el tamaño de nuestros ejes coordenados, entonces resulta ser una métrica Riemannianas.

Por el contrario si sobre el contorno de infinitesimal nuestra métrica tiende a convertirse en la de Minkowski, se denomina Pseudo – Riemannianas.

Es natural avanzar en las métricas interesantes para nosotros en la relatividad general y estas serán las métricas Pseudo – Riemannianas, puesto que en un entorno infinitesimal del espacio tiempo curvado parecerá que nos hallamos sobre una variedad plana, igual que un pequeño huerto parece llano aunque se haya labrado sobre una superficie esférica como la de la tierra.

Se denominan métricas Riemannianas a aquellas cuyos coeficientes tensoriales se aproximan tanto o más a los de una métrica Euclidea cuanto más pequeño se hace el sistema de coordenadas.

Si la diferencia entre nuestra métrica y la Euclidea puede hacerse tan pequeña como se quiera reduciendo el tamaño de nuestros ejes de coordenadas, entonces resulta ser una métrica Riemannianas.

Por el contrario si sobre un entorno infinitesimal nuestra métrica tiende a convertirse en la de Minkowski, se denomina pseudo Riemannianas.

Es natural avanzar que las métricas interesantes para nosotros en la relatividad general serán las pseudo-Riemannianas, puesto que en un entorno infinitesimal del espacio-tiempo, curvado parecerá que nos hallamos sobre una variedad plan, al igual que un pequeño huero parece llano aunque se haya labrado sobre una superficie esférica como la de la tierra.

Otra característica de la métrica es que es un tensor, es decir, una cantidad matemática que conserva invariables una serie de propiedades cuando se transforma de un sistema de coordenadas a otro.

En concreto el tensor métrico posee la decisiva propiedad de mantener constante la distancia entre dos puntos calculada con la fórmula de la métrica, aunque sus componentes (los coeficientes de la métrica) cambien al pasar de un sistema de coordenadas a otro.

Supongamos que un tensor métrico en coordenadas cartesianas es y que al pasar a coordenadas esféricas sus componentes son

Pues bien multiplicando el tensor de cada sistema por las correspondientes coordenadas, la distancia es la misma independiente de las coordenadas empleadas.

Esto es : y por lo tanto :

La exigencia del carácter tensorial de la métrica es un requerimiento lógico temporal, pues la distancia entre dos puntos no puede depender del tipo de variables que usemos para etiquetarlos.

Y es de suma importancia a la hora de aplicarlos a la gravedad relativista, ya que si la gravitación es una curvatura del espacio tiempo, los sistemas de referencia sometidos a un campo de gravedad verán sus coordenadas deformadas por dicha curvatura.

Por ello la única manera de que dos observadores distintos concuerdes con sus mediciones de un intervalo de espacio temporal ( que era constante para todos los observadores en la relatividad especial y ha de seguir siéndolo aquí) , es calculándolo mediante un tensor métrico.

A partir de la métrica podemos construir unos coeficientes denominados “conexión afín”, o más propiamente tal símbolos de Christoffel .

El significado físico de la conexión afín es que nos permite comparar vectores y tensores en distintos puntos del espacio métrico, estableciendo relaciones que de otro modo no estarían definidas.

Por ejemplo cuando tenemos ya una afinidad , el trasporte paralelo del vector ( el desplazamiento que en cada punto de la trayectoria mantiene inalterada la orientación del vector) se define justamente por medio de la derivada covariante

Construida a su vez mediante la afinidad.

En la relatividad esto resulta muy útil pues permite, en ciertas condiciones, construir leyes de conservación y obtener otros invariantes espacio temporales.

De este modo el primer obstáculo que tuvo que afrontar Einstein consistió en traducir las ecuaciones de la gravitación de la física clásica al lenguaje tensorial en cuatro dimensiones de un espacio curvo.

La primera tentativa de Einstein fue para el potencial gravitatorio llamado “Ecuación de Poisoon”

Esta igualdad expresa un resultado muy simple:

En un volumen que no encierra masa alguna, o no existe campo gravitatorio, o entra el mismo número de líneas de fuerza que sale.

En caso contrario si hay cierta cantidad de masa dentro del volumen escogido, tendremos un flujo vectorial neto atravesando el contorno de dicho volumen

La ecuación gravitatoria con que la física clásica describía esta situación era la de Laplace. En la que el miembro de la derecha ya no es igual a cero, sino proporcional a la densidad de masa encerrada en el volumen en cuestión, es decir: ”

**Ecuación de Laplace**

[](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AduC_197_Laplace_(P.S.,_marquis_de,_1749-1827).JPG)

Pierre-Simón Laplace

En [cálculo vectorial](http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_vectorial), la **ecuación de Laplace** es una [ecuación en derivadas parciales](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_en_derivadas_parciales) de segundo orden de [tipo elíptico](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_el%C3%ADptica_en_derivadas_parciales), que recibe ese nombre en honor al físico y matemático [Pierre-Simón Laplace](http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace).

Introducida por las necesidades de la [mecánica newtoniana](http://es.wikipedia.org/wiki/Mec%C3%A1nica_newtoniana), la ecuación de Laplace aparece en muchas otras ramas de la [física teórica](http://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%ADsica_te%C3%B3rica) como la [astronomía](http://es.wikipedia.org/wiki/Astronom%C3%ADa), la [electrostática](http://es.wikipedia.org/wiki/Electrost%C3%A1tica), la [mecánica de fluidos](http://es.wikipedia.org/wiki/Mec%C3%A1nica_de_fluidos) o la [mecánica cuántica](http://es.wikipedia.org/wiki/Mec%C3%A1nica_cu%C3%A1ntica).

En tres dimensiones, el problema consiste en hallar funciones reales doblemente [diferenciables](http://es.wikipedia.org/wiki/Diferenciable), una función \scriptstyle ude variables reales *x*, *y*, y *z*, tal que

En [**coordenadas cartesianas**](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_cartesianas)


{\partial^2 u\over \partial x^2 } +
{\partial^2 u\over \partial y^2 } +
{\partial^2 u\over \partial z^2 } = 0.


En [**coordenadas cilíndricas**](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_cil%C3%ADndricas),

  {1 \over \rho} {\partial \over \partial \rho}
  \left( \rho {\partial u \over \partial \rho} \right) 
+ {1 \over \rho^2} {\partial^2 u \over \partial \theta^2}
+ {\partial^2 u \over \partial z^2 } =0 


En [**coordenadas esféricas**](http://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_esf%C3%A9ricas),

  {1 \over r^2} {\partial \over \partial r}
  \left( r^2 {\partial u \over \partial r} \right) 
+ {1 \over r^2 \sin \varphi} {\partial \over \partial \varphi}
  \left( \sin \varphi {\partial u \over \partial \varphi} \right) 
+ {1 \over r^2 \sin^2 \varphi} {\partial^2 u \over \partial \theta^2} =0 


Muchas veces se escribe de la siguiente manera:

\nabla^2 u = 0 \,

Donde \nabla^2 es el [operador de Laplace](http://es.wikipedia.org/wiki/Operador_de_Laplace) o "laplaciano"

Que también se escribe como:

\nabla \cdot \nabla u = 0, 

Donde \scriptstyle \nabla \cdotes la [divergencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Divergencia), y \scriptstyle \nablaes el [gradiente](http://es.wikipedia.org/wiki/Gradiente)

Newton intento a través de esta idea hallar un correlato para una ecuación tensorial que señalase que la curvatura del espacio tiempo tetradimensional es cero.

Lo más natural era tomar un tensor de curvatura que representa dicha situación e igualándola a cero.

Lo más natural era tomar el tensor de Riemann –Christoffel y llego a un tensor con cuatro subíndices que contenía toda la información necesaria sobre la curvatura intrínseca de una variedad con un numero cualquiera de dimensiones. Igualando este tensor a cero tendríamos:

El lado amargo de esta tentativa es que constituya una condición demasiado restrictiva para nuestros propósitos.

La anulación del tensor de curvatura implica que la variedad en la que así ocurra será llana en todas partes. (La curvatura global será siempre cero y no habrá campos de gravedad en ninguna parte9

Lo que buscaba es un tensor cuya anulación local sea un caso particular dentro de una variedad más amplia que contemple la presencia de materia y la aparición de campos gravitatorios.

A partir de un simple paso matemático en el tensor de Riemann Einstein obtuvo el tensor que necesitaba, el llamado tensor de Ricci , con solo dos índices

**Tensor de Ricci**

En [geometría diferencial](http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_diferencial), el **tensor de curvatura de Ricci** o simplemente, **tensor de Ricci**, que suele notarse por los símbolos R_{ab}o *Ric*, es un [tensor](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor) simétrico bivalente obtenido como una [traza](http://es.wikipedia.org/wiki/Traza) del [tensor de curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_curvatura), que, como aquel, puede definirse en cualquier variedad dotada de una [conexión afín](http://es.wikipedia.org/wiki/Conexi%C3%B3n_af%C3%ADn). Fue introducido en 1903 por el matemático italiano [G. Ricci](http://es.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Ricci-Curbastro).

En caso de estar definido en una [variedad de Riemann](http://es.wikipedia.org/wiki/Variedad_de_Riemann), puede interpretarse como un [Laplaciano](http://es.wikipedia.org/wiki/Laplaciano) del tensor [métrico](http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9trica_de_Riemann). Al igual que la métrica, el tensor de Ricci será una forma bilineal simétrica. En caso en que ambos sean proporcionales, \text{Ric} = \lambda g, diremos que la variedad es una [variedad de Einstein](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Variedad_de_Einstein&action=edit&redlink=1).

El tensor de Ricci determina totalmente al [tensor de curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_curvatura), si la variedad de Riemann correspondiente tiene dimensión *n* < 4. En [relatividad general](http://es.wikipedia.org/wiki/Relatividad_general), dado que el [espacio-tiempo]] tiene cuatro dimensiones, el tensor de Ricci no determina por completo la curvatura.

**Definición**

La curvatura de Ricci puede expresarse en términos de la [curvatura seccional](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Curvatura_seccional&action=edit&redlink=1) de la manera siguiente: para un vector unitario *v*, *<R(v), v >* es suma de las curvaturas seccionales de todos los planos atravesados por el vector *v* y un vector de un marco ortonormal que contiene a *v* (hay n-1 tales planos). Aquí *R(v)* es la curvatura de Ricci como un [operador lineal](http://es.wikipedia.org/wiki/Operador_lineal) en el plano tangente, y *<.,.>* es el producto escalar métrico. La curvatura de Ricci contiene la misma información que todas las tales sumas sobre todos los vectores unitarios. En las dimensiones 2 y 3 éste es igual que especificar todas las [curvaturas](http://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura) seccionales o el [tensor de curvatura](http://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_curvatura), pero en dimensiones más altas la curvatura de Ricci contiene menos información. Por ejemplo, las variedades de Einstein no tienen que tener curvatura constante en las dimensiones 4 y más.

**Expresión en coordenadas**

Usando un sistema de coordenadas natural, el tensor de curvatura de Ricci es igual a:

 R_{\sigma\nu} = {R^\rho}_{\sigma\rho\nu} = \partial_\rho\Gamma^\rho_{\nu\sigma}
    - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\rho\sigma}
    + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}
    - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}

Ahora se enfrentaba a la etapa más complicad del problema, hallar un tensor de energía.

La masa había sido en la antigua ley de newton la única fuente del campo gravitacional, pero las cosas no eran tan sencillas en la teoría Einsteniana.

No solo era que ahora la energía también contribuía al campo por su equivalencia con la masa, sino que había que tener en cuenta el tetraimpulso del sistema debido a que al incrementarse la velocidad crecía igualmente la masa, que es equivalente a la energía en el modelo relativista y como consecuencia crecía el campo gravitacional.

En tensor construido con la masa-energía encontrada en este caso tiene la forma . Este tensor tiene cuatro componentes cuando se escribe para cuatro dimensiones, que proviene de multiplicar los cuatro valores posibles de cada índice.(o,1,2,3)

El hecho de que el universo se isótropo 8posee las mismas propiedades en cualquier dirección) permitió bajar las complicaciones de este tensor considerando que existe cierta simetría en su construcción.

Si todas las direcciones del espacio son diferentes, es por completo indiferente donde coloquemos cada eje de coordenadas o como llamemos a cada uno.

Así el flujo de la componente x del impulso a lo largo de la dirección y ha de ser igual al flujo de la componente y a lo largo del eje x, con lo que =

Así, haciendo otras hipótesis de conservación de energía Einstein logra establecer un tensor tetradimensional de energía que incorpora a sus ecuaciones.

El paso final en la búsqueda de las ecuaciones del campo gravitatorio, consistía en hallar la relación entre ambos tensores, el de curvatura de Ricci y el energético.

El camino más inmediato parecía lograrse estableciendo una proporcionalidad entre el tensor de Ricci y el de la energía, escribiendo:

K , mas nuevamente la senda de la solución se mostraba esquiva

Fueron necesarios bastantes años de dudas, dilaciones y tentativas fallidas, hasta encontrar unas ecuaciones que cumpliesen todas las condiciones deseables ya enumeradas y que a la vez garantizasen la conservación de la energía, cosa que no conseguía la sencilla relación de proporcionalidad antes presentada.

La constante cosmológica.

El hecho de que la derivada covariante de la métrica sea idénticamente nula =0 permite escribir estas ecuaciones de un modo distinto pero que lleva profundas repercusiones a escala cosmológica.

Donde A, el valor de la constante cosmológica ha de determinarse empíricamente

Einstein la introdujo originalmente con la esperanza de encontrar una solución de sus ecuaciones que ofreciese un modelo estático del universo en su conjunto.

Cuando se comprobó que la constante con signo positivo ocasionaría una fuerza repulsiva y que su valor experimental parecía ser prácticamente nulo,

Einstein la rechazó juzgándola como un grave error.

Sin embargo, a partir de la segunda mitad de la década del 90, se acumularon evidencias observacionales que asignaban un valor no nulo a esta controvertida constante.

Como consecuencia de ello la expansión del universo parece estar acelerándose en lugar de frenarse, como se había supuesto hasta esa fecha

La explicación usual considera que la densidad de energía y presión posee un valor no nulo incluso en el vacío.